Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Per poter avere ulteriori informazioni sulle successioni definite per ricorrenza, sarà molto utile il seguente

Principio di Induzione

Sia (P_n) una proposizione dipendente da $n \in \mathbb{N}$ se

(P_{n_0}) è vera per $n_0 \in \mathbb{N}$ $\quad (n_0 = 0, 1, 2)$

(base induzione)

(P_n) è vera $\Longrightarrow$ (P_{n+1}) è altresì vera

Allora (P_n) è vera $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

Integrali Indefiniti

Def (Primitiva) Sia $F: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremo che una funzione $g: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è primitiva per $F(x)$ se

(i) $g(x)$ è derivabile in $]a,b[$

(ii) $g'(x) = F(x) \quad \forall x \in]a,b[$

Def Chiamo integrale Indefinito di $F(x)$

$$\int F(x)\,dx = \left\{ F: (a,b) \to \mathbb{R} : F \text{ è primitiva di } F(x) \right\}$$

Prop se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$

$\Rightarrow$ $F(x)+c$ è anch'essa primitiva di $f(x)$

In particolare, se ho una primitiva ne ho infinite!

Dim Infatti:

$$(F(x)+c)' = F'(x) + (c)' = F'(x) = f(x)$$

$\Rightarrow$ $F+c$ è primitiva $\forall c \in \mathbb{R}$

Prop se $F(x)$ è primitiva di $f:(a,b) \to \mathbb{R}$. Allora $\forall\, G(x)$ primitiva di $f(x)$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$:

$$G(x) = F(x) + c$$

Dim Ricordo la 1ª conseguenza al teorema di Lagrange: se una funzione è derivabile in un intervallo con derivata identicamente nulla $\Rightarrow$ funzione è costante nell'intervallo

Infatti, $\forall\, G:(a,b) \to \mathbb{R}$ primitiva di $f(x)$ e considero la funzione $G(x) - F(x)$

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) =$$

$$= f(x) - f(x) = 0$$

Da Lagrange $\Rightarrow$ $G(x) - F(x) = c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \boxed{G(x) = F(x) + c}$$

In definitiva se F è primitiva di $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = \{ F(x) + c \ : \ c \in \mathbb{R} \}$$

Proprietà (linearità)

se $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Allora

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Dim Infatti se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$ e
$G(x)$ è primitiva di $g(x)$

$$\Rightarrow \quad (\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x)$$

$$= \alpha f(x) + \beta g(x)$$

☒

Sull'integrale indefinito non esistono formule generali sull'operazione di prodotto/rapporto

Teorema (integrazione per parti)

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili

Dim Vogliamo provare un'uguaglianza insiemistica, attraverso il principio della doppia inclusione.

(1) Provo che $f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx \subseteq \int f'(x)\cdot g(x)$

Sia $H(x) \in \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$ e considero

$$\left(f(x)\cdot g(x) - H(x)\right)' = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' - H'(x) =$$

$$= f'(x)\cdot g(x) + \cancel{f(x)\cdot g'(x)} - \cancel{f(x)\cdot g'(x)} =$$

$$= f'(x)\cdot g(x)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x)\cdot g(x) - H(x) \in \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

(2) Provo che $\int f'(x)\cdot g(x)\,dx \subseteq f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$

Infatti, sia $H_1 \in \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

da (1) sappiamo già che $f(x)\cdot g(x) - H_2(x) \in \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

se $H_2 \in \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$

Dalla 2ª proposizione (due primitive della stessa funzione differiscono da una costante)

$$\Longrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : \quad H_1(x) = f(x)\cdot g(x) - H_2(x) + c$$

$$\in f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

∎

Applicazione (1) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int \log^n x \, dx = \int \underset{f'(x)}{1} \cdot \underset{g(x)}{\log^n x} \, dx =$$

$f'(x) \leftrightarrow f(x) = x$

$$\underline{\underline{(i.p.)}} \quad x \cdot \log^n x - \int \cancel{x} \cdot n \cdot \log^{n-1} x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx = (*)$$

A parte $\left((\log x)^n \right)' = \left(z^n \right)' = n \cdot z^{n-1} \cdot z' =$

con $z = \log x$ $\quad = n \cdot (\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}$

$$(*) = x \log^n x - n \int \log^{n-1} x \, dx$$

Ossia

$$\boxed{\int \log^n x \, dx = x \log^n x - n \int \log^{n-1} x \, dx}$$

$n=1 \rightarrow$ $\int \log x \, dx = x \log x - \int (\log x)^0 \, dx =$

$= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x + c$

$n=2 \rightarrow \int \log^2 x \, dx = x \log^2 x - \int \log x \, dx =$

$= x \log^2 x - \left[x \log x - x \right] + c$

Applicazione (2)

$$\int \underset{f(x)}{x^n}\, \underset{g'(x)}{e^x}\, dx \overset{(i.p.)}{=} x^n \cdot e^x - \int n \cdot x^{n-1} \cdot e^x =$$

$g(x) = e^x$

$$= x^n e^x - n \int x^{n-1} \cdot e^x dx$$

Esempio ($n=1$)

$$\int x\, e^x dx = x e^x - \int x^0 \cdot e^x dx$$

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

($n=2$)

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int x\, e^x dx =$$

$$= x^2 e^x - [x e^x - e^x] + c$$

Applicazione (3)

$$\int \underset{f(x)}{x^n} \cdot \underset{g'(x)}{\operatorname{sen} x}\, dx \overset{(i.p.)}{=} x^n(-\cos x) - \int n\, x^{n-1} \cdot (-\cos x) dx$$

$g(x) = -\cos x$

$$= -x^n \cos x + n \int \underset{f(x)}{x^{n-1}} \underset{g'(x)}{\cos x}\, dx \overset{(i.p.)}{=} *$$

$g(x) = \operatorname{sen} x$

$$* = -x^n \cos x + n \left[x^{n-1} \cdot \operatorname{sen} x - \int (n-1) x^{n-2} \cdot \operatorname{sen} x \right]$$

Ossia

$$\boxed{\int x^n \operatorname{sen} x\, dx = -x^n \cos x + n\, x^{n-1} \operatorname{sen} x - n(n-1) \int x^{n-2} \operatorname{sen} x\, dx}$$

Esempio

($n=2$) $$\int x^2 \operatorname{sen} x = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x - 2 \int \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2(-\cos x) + c$$

Analogamente si risolve $\int x^n \cos x \, dx$

Applicazione (4)

$$\int \underset{f(x)}{e^x} \underset{g(x)}{\cos x} \, dx \overset{(i.p.)}{=} e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx$$

$$= e^x \cos x + \int \underset{f'(x)}{e^x} \underset{g(x)}{\sin x} \, dx \overset{(i.p.)}{=}$$

$$= e^x\cos x + \left[e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \right] =$$

$$= e^x(\cos x + \sin x) \underbrace{- \int e^x \cos x \, dx}_{\text{lo sposto al 1° membro}}$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\,dx + \int e^x \cos x \, dx = e^x(\cos x + \sin x)$$

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x(\cos x + \sin x)$$

$$\boxed{\int e^x \cos x \, dx = e^x \frac{\cos x + \sin x}{2} + c}$$

Esercizio (12-09-2002)

Sia
$$f(x) = \begin{cases} 5x^4 - 2 & \text{se } x \in [-1, 0[\\ 2^{x^2-2x} & \text{se } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Trovare inf f , sup f precisando se si trattano di min f / max f

$f : [-1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(-1) = 5(-1)^4 - 2 = 5-2 = 3$

$f(3) = 2^{3^2-2\cdot 3} = 2^{9-6} = 2^3 = 8$

Continuità in $x=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$?

$\lim_{x\to 0^-} 5x^4 - 2 = -2$, $f(0) = 2^{0^2-2\cdot 0} = 2^0 = 1$

$\Rightarrow$ $x=0$ è discontinuità di 1ª specie

Studio l'andamento della f(x) : $\boxed{f'(x) \geq 0}$

$$f'(x) = \begin{cases} 5 \cdot 4 \cdot x^3 & \text{se } x \in]-1,0[\\ \frac{1}{\log 2} 2^{x^2-2x}(2x-2) & \text{se } x \in]0,3[\end{cases}$$

A parte

$(2^{x^2-2x})' = (2^z)' = 2^z \cdot \frac{1}{\log 2} \cdot z'$

$z = x^2 - 2x$

$= 2^{x^2-2x} \cdot \frac{1}{\log 2} \cdot (2x-2)$

$f'(x) \geq 0$

caso $x \in]-1,0[$

$\underbrace{20}_{>0} \underbrace{x^3}_{<0} \geq 0$ Mai

$\Longrightarrow$ $f(x)$ decresce in $]-1,0[$

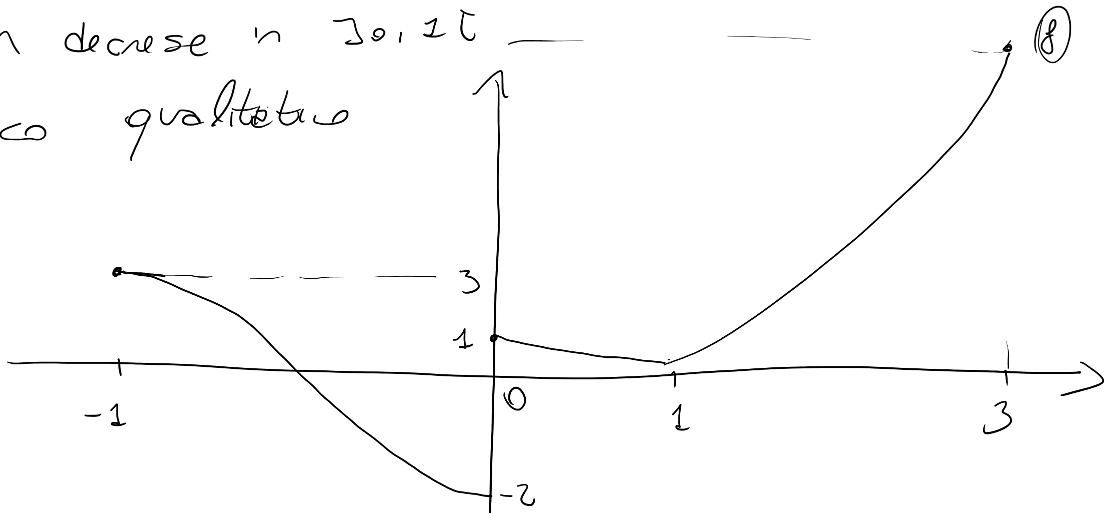
Caso $x \in]0,3[$ $\qquad \underbrace{\frac{1}{\lg 2}}_{>0} \cdot \underbrace{2^{x^2-2x}}_{>0} (2x-2) \geq 0$

$\Longleftrightarrow$ $2x-2 \geq 0$ $\Longleftrightarrow$ $x \geq 1$

$\Rightarrow$ $f(x)$ cresce in $]1,3[$

$f(x)$ decrese in $]0,1[$

Grafico qualitativo



$\Longrightarrow$ $\inf f = -2$ non è $\min f$

$\sup f = 8 = \max f$

Esercizio Disegnare il grafico della funzione

$$g(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } x \in [0,1[\\ x^{\frac{1}{3}} & x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

$g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$g(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}} = +\infty$

Vedo Asintoto Obliquo destro

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{2/3}} = 0$$

$\Rightarrow$ non abbiamo A Obl.

<u>Continuità</u>: $\lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$?

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} \quad , \quad g(1) = 1^{\frac{1}{3}} = 1$$

$\Rightarrow$ $x=1$ discontinuità di 1^a specie

$$g'(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\lg \frac{1}{2}} & x \in]0,1[\\ \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} & x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lg \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } x \in]0,1[\\ \frac{1}{3x^{2/3}} & x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

Derivabilità in $x=1$ $\quad \lim_{x\to 1^-} g'(x) = \frac{1}{\lg \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1^+} g'(x) = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ $x=1$ è punto angoloso

studio $g'(x) \geq 0$

Caso $x \in]0,1[$: $\underbrace{\frac{1}{\lg \frac{1}{2}}}_{<0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^x}_{>0} \geq 0$ Mai

$\Rightarrow$ $g(x)$ decresce in $]0,1[$

Caso $x \in]1,+\infty[$ $\frac{1}{\underbrace{3}_{>0}\, \underbrace{x^{\frac{2}{3}}}_{>0}} \geq 0$ sempre

$\Rightarrow$ $g(x)$ cresce in $]1,+\infty[$

$$g''(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lg \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\lg \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x & x \in]0,1[\\ \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} & x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

$$\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

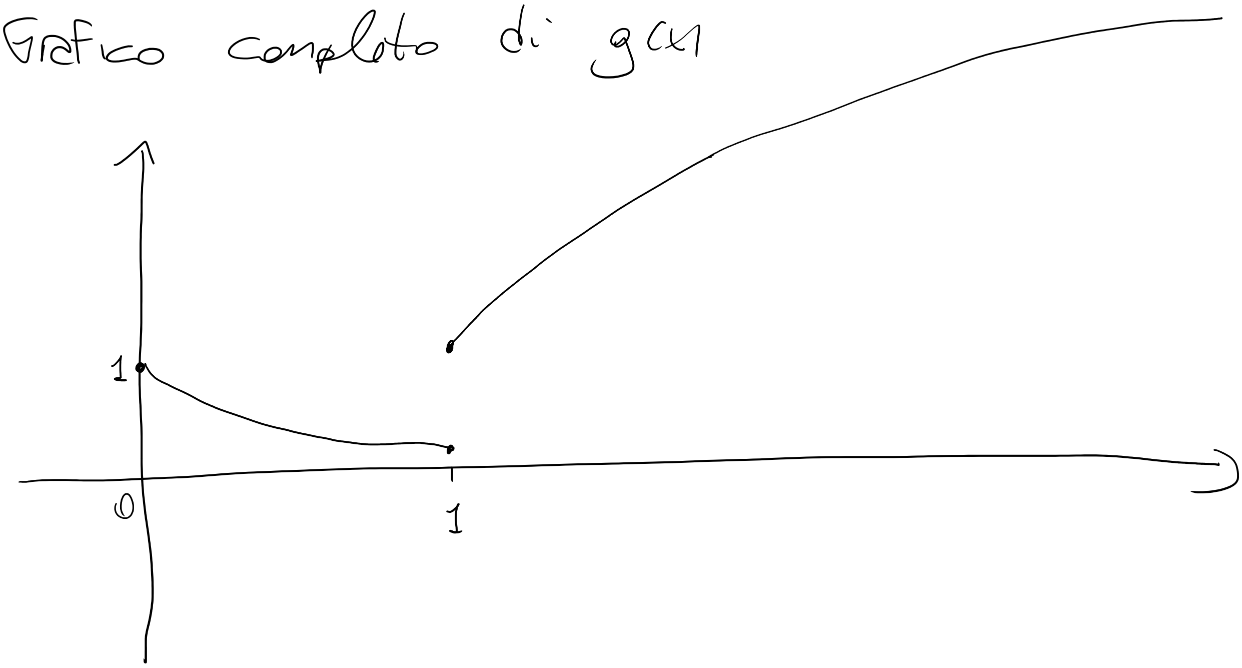
ossia $g''(x) = \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{\left(\lg \frac{1}{2}\right)^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^x}_{>0} & \text{se } x \in]0,1[\\ \underbrace{-\frac{2}{9}}_{<0} \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}}_{>0} & \text{se } x \in]1,+\infty[\end{cases}$

$\Rightarrow$ $g(x)$ è convessa in $]0,1[$

$g(x)$ è concava in $]1,+\infty[$

$\Rightarrow$ $x=1$ è flesso

Grafico completo di $g(x)$



Esercizio 11-01-2002

Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{5^x}{3^{x+2}}} = \left(\sqrt{\frac{+\infty}{+\infty}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{5^x}{3^x\cdot 3^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{3^2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^x} = +\infty$$

$\to +\infty$

Esercizio (15-07-2002)

Data la funzione

Data la funzione

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{1-x} & \text{se } x \in]-\infty, 0] \\ x^3 - 3x & \text{se } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - Trovare

(1) Punti di discontinuità

(2) intervalli dove $F(x)$ cresce (decresce)

(3) $\inf f$, $\sup f$ precisando se sono $\min f$ / $\max f$

Continuità in $(x=0)$

$$f(0) = \frac{2-0}{1-0} = 2 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} x^3 - 3x = 0$$

$\Rightarrow x=0$ è discont. di 1ª specie

$\boxed{f'(x) \geq 0}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-(1-\cancel{x}) - (2-\cancel{x})(-1)}{(1-x)^2} & x \in]-\infty, 0[\\ 3x^2 - 3 & x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

$$\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & x \in]-\infty, 0[\\ 3x^2 - 3 & x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

monotonia:

Caso $x \in]-\infty, 0[$ $\qquad \frac{1}{(1-x)^2} \geq 0$ $\qquad$ Sempre

$\Rightarrow$ F(x) cresce in $]-\infty, 0[$

Caso $x \in]0, +\infty[$ $\qquad 3x^2 - 3 \geq 0$

$x^2 - 1 \geq 0$

$\cancel{x \leq -1} \quad \cup \quad x \geq 1$

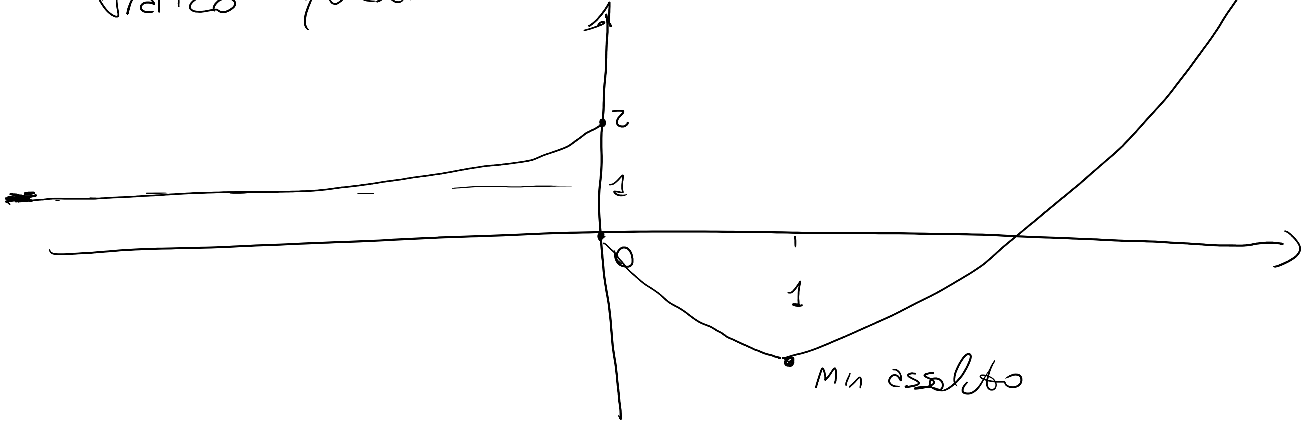
$\Rightarrow$ F(x) decresce in $]0, 1[$

F(x) cresce in $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2-x}{1-x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x = +\infty$$

Grafico qualitativo



$x = 1$ è punto di min assoluto

$$\Rightarrow \quad \min f = f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 = -2$$

$\sup f = +\infty$ (in particolare non ci sono max assoluti)

<u>Esercizio</u>

Studiare la derivabilità di

$$f(x) = \frac{|x^2-2x-5|}{x-6}$$

CE $\;]-\infty, 6[\; \cup \;]6, +\infty[$

$x^2-2x-5 \geq 0$ (?) $\qquad x \leq \frac{2-\sqrt{24}}{2} \; \cup \; x \geq \frac{2+\sqrt{24}}{2}$

$\Delta = 4 + 4\cdot 5 = 24 > 0$

$x \leq 1-\sqrt{6} \; \cup \; x \geq 1+\sqrt{6}$

Riscrivo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-5}{x-6} & \text{se } x \in \,]-\infty, 1-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{6}, 6[\\ & \cup \,]6, +\infty[\\ -\dfrac{x^2-2x-5}{x-6} & x \in \,]1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}[\end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x-2)(x-6)-(x^2-2x-5)}{(x-6)^2} & x \in \#_1 \\ -\dfrac{(2x-2)(x-6)-(x^2-2x-5)}{(x-6)^2} & x \in \,]1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}[\end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 12x - \cancel{2x} + 12 - x^2 + \cancel{2x} + 5}{(x-6)^2} & x \in A_1 \\[2ex] -\dfrac{x^2 - 12x + 17}{(x-6)^2} & x \in \left]1-\sqrt{6},\ 1+\sqrt{6}\right[\end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 12x + 17}{(x-6)^2} & x \in \left]-\infty, 1-\sqrt{6}\right[\cup \left]1+\sqrt{6}, 6\right[\cup \left]6, +\infty\right[\\[4ex] -\dfrac{x^2 - 12x + 17}{(x-6)^2} & x \in \left]1-\sqrt{6},\ 1+\sqrt{6}\right[\end{cases}$$

$$\lim_{x \to (1-\sqrt{6})^-} f'(x) = \lim_{x \to (1-\sqrt{6})^-} \frac{x^2 - 12x + 17}{(x-6)^2} = \frac{(1-\sqrt{6})^2 - 12(1-\sqrt{6}) + 17}{(1-\sqrt{6}-6)^2} =$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{6} + 6 - 12 + 12\sqrt{6} + 17}{(-\sqrt{6}-5)^2} =$$

$$= \frac{12 + 10\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})^2}$$

$$\lim_{x \to (1+\sqrt{6})^+} f'(x) = -\frac{12 + 10\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})^2}$$

$\Rightarrow$ $x = 1-\sqrt{6}$ è angoloso

Si prova che anche $x = 1+\sqrt{6}$ è angoloso

<u>Esercizio</u> Sia

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n \cdot n^2 + 2n - 1}{(-1)^n \cdot n^2 + 1} \quad : \quad \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{matrix} \right\}$$

$$A = A_p \cup A_d$$

$$A_p = \left\{ \frac{n^2+2n-1}{n^2+1} \quad \text{se } n \in \mathbb{N} \quad n \text{ pari} \right\}$$

$$A_d = \left\{ \frac{-n^2+2n-1}{-n^2+1} \quad n \in \mathbb{N} \quad n \text{ dispari}, \ n \neq 1 \right\}$$

Studio maggioranti per A_p

$$n^2+2n-1 \geq 0 \iff \Delta = 4+4 = 8$$

$$\Rightarrow \cancel{n \leq -1-\sqrt{2}} \quad \cup \quad n \geq -1+\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ sempre $\forall n \geq 2$

$\Rightarrow A_p$ è formato solo da numeri positivi

Cerco maggioranti $x > 0$

$$\frac{n^2+2n-1}{n^2+1} \leq x \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ pari}$$

$n \geq 2$

$$n^2+2n-1 \leq xn^2+x$$

$$\boxed{(1-x)n^2+2n-(x+1) \leq 0 \quad (*)}$$

segno

$1-x>0 \iff x<1$

Caso $x\geq 1$ $\quad (1-x\leq 0)$

(*) la riscrivo $\boxed{(x-1)n^2-2n+(x+1)\geq 0}$ (**)

essendo che le soluzioni di (**) devono coincidere $\forall n\in\mathbb{N}$ pari

$\iff \Delta\leq 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 1-(x-1)(x+1) =$$

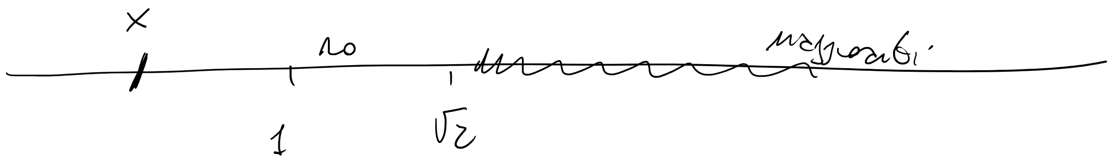
$$= 1-(x^2-1) =$$

$$-x^2+2 \leq 0$$

Caso $x\geq 1$ $\iff$ $\cancel{x\leq -\sqrt{2}} \cup x\geq\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $x\geq 1$ è maggiorante $\iff x\geq\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $x<1$ non possono essere maggioranti



$\Rightarrow \sup A_p = \sqrt{2}$

Problema $\quad \sqrt{2} = \dfrac{n^2+2n-1}{n^2+1}$ con n pari ?

Problema $\sqrt{2} = \frac{n^2+2n-1}{n^2+1}$ (Con n pari) !